Supersymmetry, conformal field theory and operator algebras (Non-Commutative Analysis and Micro-Macro Duality)

AUTHOR(S):

河東, 泰之

数理解析研究所講究録
第 1609 巻 2008 年 114-119

Supersymmetry, conformal field theory and operator algebras

河東泰之 (かわひがしやすゆき)
東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: yasuyuki@ms.u-tokyo.ac.jp

1 前置き

場の量子論を，時空領域でパラメトライズされた作用素環の族を用いて公理的，数学的に研究する方法が 40 年以上前から追求されており，代数的場の量子論 (algebraic quantum field theory) と呼ばれている．(4 次元)Minkowski 空間で Poincaré 対称性を考慮したものが古くから研究されいるが，2 次元 Minkowski 空間の光線をコンパクト化した S^1 上で可微分同相写像に関する共変性を要請した共形場理論を作用素環の族を用いて研究することが最近発展している．その枠組みで超対称性を考慮した，supersymmetric conformal field theory の場合について述べる．これは S. Carpi, R. Longo との共著論文 [4] に基づく．なお本文の内容は，私の別の原稿 “Supersymmetric conformal field theory and operator algebras”(京大数理研講究録「作用素環論の新展開」) と一部重なっていることをお断りしておく．

2 共形場理論と作用素環

まず代数的場の量子論におけるカイラルな共形場理論のフォーミュレーションについて説明する．正確な定義と基本的性質の証明，引用文献は [11] を参照していただきたい．

量子場の理論を数学的に扱う際に昔から広く使われているのは Wightman 場と呼ばれるものであり，それは数学的には時空の上の作用素値超関数である．これらの族である性質を満たすものを考えることになるが,「作用素値」ということは，ある共通の Hilbert 空間の上の (非有界) 作用素に値を取るということである．これらは「超」関数であることや，非有界作用素が出てくることから数学的な取り扱いが困難になる．そこで，有界な線形作用素だけを用いてそれらのなす作用素環の族を研究対象にするのが代数的場の量子論である．すなわち，時空領域 O に対し，その中に台を持つ試験関数を取り，作用素値超関数に対してこの試験関数を適用すると，一般に非有界な用素が出るが，作用素値超関数を今考えている族の中で動かし，試験関数のほうも動かし，こうしてできる作用素たちから生じる「有界」線形作用素たちのなす von Neumann 環を作る．これにより，時空領域 O でパラメトライズされた von Neumann 環の族ができる．純粋に数学的に考える際は，ある種の公理を満たす von Neumann 環の族が数学的対象である．これらの公理を考える背景には，上のような作用素値超関数があるのだが，論理的な立場からは作用素値超関数は忘れて，ただ公理だけが最初に与えられていると思ってもかまわない．これはきわめ

て一般的な設定で，ここで考える「時空」は何でもよく，さまざまな多様体や「非可換時空」での試みもあるが，一番詳しくわかっているのは Minkowski 空間の場合である．ここではさらに，$1+1$-次元の Minkowski 空間を考えて，light ray $\{(x,t)| \mid x=\pm t\}$ をコンパクト化した S^1 の上の理論を考える．この円周が物理量を観測する空間に当たるものである．このときは考える時空領域は円周上の空でも稠密でもない，連結開集合 I たちである．これらを単に区間と呼ぶ．また時空の対称性を記述する群も指定する必要があり，Poincaré 群がよく使われるが，ここでの円周上の理論では非常に高い対称性，すなわち S^1 上の向きを保つ diffeomorphism 全体の群 $\mathrm{Diff}(S^1)$ を使う．まず，“super” のつかないものを説明する．

円周上の区間 I に対し，共通の Hilbert 空間の上の von Neumann 環 $A(I)$ を対応させる写像が数学的対象である．公理系の簡単な説明は次のとおりである．まず，区間が大きくなると，試験関数の種類は増えるので，von Neumann 環も大きくなる．これが単調性の公理である．次に 2 次元 Minkowski 空間の Einstein causality から生じるものとして，$I_1\cap I_2=\emptyset$ のとき $[A(I_1),A(I_2)]=0$ となるという局所性の公理がある．ここで四角い括弧は commutator である．また，共変性の公理は $\mathrm{Diff}(S^1)$ の射影的ユニタリ表現 u_g が今考えている Hilbert 空間の上にあって，$u_gA(I)u_g^*=A(gI)$ となるということである．さらに g が区間 I 上でトリビアルなときは，$\mathrm{Ad}(u_g)$ も $A(I)$ 上トリビアルとする．さらに円周の回転から生じる diffeomorphism についてはその生成する one-parameter unitary 群の生成元が正であることも要請する．これを positive energy condition という．これに加えて，今考えている Hilbert 空間には特別の，真空ベクトルと呼ばれる特別なベクトルがあって，表現についてある不変性を持っていることも要請する．こうして公理付けられた作用素環の族を local conformal net と言う．さらに通常成り立っている split property という条件の下では各 $A(I)$ は自動的に単射的な III_1 型因子環 (Araki-Woods factor) になることが知られている．すなわち各作用素環 $A(I)$ はどの共形場理論でも同型であり，したがって理論の情報を何も持っておらず，族としての $\{A(I)\}$ たちの相対的な位置関係が情報を担っているのである．

これを “super” にするにはまず，$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-grading を考える．すなわち今考えている Hilbert 空間上に self-adjoint unitary Γ が存在して，$\Gamma A(I)\Gamma=A(I)$ などの条件を満たすことである．これによって，Hilbert 空間も各 von Neumann 環 $A(I)$ も，even part, odd part に分かれることになる．これによって，odd operator x,y に対しては，$[x,y]=xy+yx$ とすることにより，super commutator $[x,y]$ を定めることができる．(一般の元については線形に拡張する．) 局所性の公理で，commutator を super commutator で置き換えたものが，超局所性の公理である．これに応じて，$\mathrm{Diff}(S^1)$ の表現についてもしかるべき条件をつける．反可換なものは Fermion と呼ばれるので，こうしてできる作用素環族を Fermi conformal net と呼ぶ．正確な定義は [4] にある．これを super conformal net と呼んでもいいかもしれないが，実際にはもっと強い条件を満たすものを super conformal net と呼ぶ．これについては下に述べる．

3 Fermi conformal net の表現論

代数的場の量子論において最も基本的な道具は表現論である．まず “super” のつかない場合を復習する．$A(I)$ たちは初めから，真空ベクトルを持つ Hilbert 空間に作用しているが，これらを一斉に他の共通の，真空ベクトルを持たない Hilbert 空間に表現することを考える．$\mathrm{Diff}(S^1)$ についても新しい Hilbert 空間へのある種の compatibility を持った

表現が必要である．表現の直和や既約性は簡単に定義できるが，テンソル積の定義はまったく明らかではなく，これを実現するのが Doplicher-Haag-Roberts 理論 [5] であった．表現をある大きな C^*-環の自己準同型として実現し，自己準同型の合成を「テンソル積」の演算と定めるのである．これがテンソル積に期待されるあらゆる性質を持っており，local conformal net の場合は，これによって表現たちが組み紐圏をなす．([7].) さらに作用素環的によい条件を満たす場合にはモジュラー圏ができることもわかっている．([13].) この表現論を Fermi conformal net に拡張する必要がある．いろいろ技術的な問題はあるが，これらの表現論は Doplicher-Haag-Roberts 理論を拡張する形で，[4] で与えられた．

Fermi conformal net は even part に制限すれば通常の local conformal net になっていることに注意する．逆に言えば，Fermi conformal net は通常の local conformal net の指数 2 の拡張である．特に，通常の local conformal net の表現に対して，下でも出てくる α-induction と呼ばれる誘導表現の技法を適用したとき，現れるものがいつ表現になるかを，モノドロミーを用いて決定した．一般に，α-induction は，ソリトン表現と呼ばれる，少し表現の条件をゆるめたものしか与えない．ソリトン表現は，S^1 から "無限遠点" を取り除いたところでの net の表現を考えることにあたっている．

4 Fermi conformal net の分類理論

まず [11] による，local conformal net の場合の分類理論を思い出そう．これと同様の方針で super の場合の分類を行う．

Local conformal net に対し，共形共変性の公理から，Virasoro 代数の unitary 表現が生じる．Virasoro 代数とは，生成元 $\{L_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ と 中心的な元 c から

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0},$$

という関係式で定められる無限次元 Lie 環である．この生成元 c は既約表現では正の実数に移ることがわかるので，その値を central charge と呼んでやはり c で表す．[6], [10] によって，c の取りうる値は

$$\{1 - 6/m(m+1) \mid m = 3, 4, 5, \ldots\} \cup [1, \infty)$$

であることがわかっている．Virasoro 代数の生成元 L_n の表現において，表現されたものも単に L_n と書くと，$\sum_n L_n z^{-n-2}$ が stress-energy tensor と呼ばれる作用素値超関数として解釈できる．これを Wightman field と思って本稿最初のような考え方で試験関数を使うと，local conformal net ができることがわかっている．$c < 1$ の場合は，[10] の coset construction を作用素環的に実現したものと同じであり，[16, 17] によってその基本的な性質がわかっている．特にその表現論はモジュラー圏を与えることがわかっている．(Xu の仕事と [13] をあわせてよりわかる．) 一般の local conformal net でも Virasoro 代数の表現ができるので central charge c の値を定義することができ，local conformal net の実数値不変量が定まる．$c < 1$ となるものは，この Virasoro 代数の表現から生じる local conformal net (Virasoro net と呼ばれる) の拡大となっていることが共形共変性と局所性よりわかる．

このような拡大については誘導表現に当たる α-induction の一般論が [14, 15, 1] で研究されており，延長から modular invariant と呼ばれる特別な行列が生じることがわかっている．これには Ocneanu が Dynkin 図形について研究していた graphical な方法が役に

立つ．この modular invariant は単に行列なので，無限次元の作用素環よりずっと扱いやすくさまざまな分類結果が得られている．この Virasoro 代数の表現の状況では，[3] により modular invariant の分類が得られており，それをもとに，[11] で local conformal net の分類が与えられた．そこでは分類リストの元は，A-D_{2n}-$E_{6,8}$ 型の Dynkin 図形のペアで，Coxeter 数の差が 1 であるようなものでラベル付けされた．この分類リストには，それまで知られていなかった新しい例が含まれており，その構成は mirror extension として [18] で一般化されている．

ここで共形共変性を "super 化" したものとして，$N = 1$ super Virasoro 代数を考える．これは Virasoro 代数の生成元と関係式に $\{G_r\}$ と次の関係式

$$[L_m, G_r] = (\frac{m}{2} - r)G_{m+r}$$

$$[G_r, G_s] = 2L_{r+s} + \frac{c}{3}(r^2 - \frac{1}{4})\delta_{r+s,0}$$

を加えたものであるが，r の動く範囲は二通りあって，$r \in \mathbf{Z} + 1/2$ のときに Neveu-Schwarz 代数，$r \in \mathbf{Z}$ のときに Ramond 代数と呼ぶ．この表現がしかるべく組み込まれている Fermi conformal net を $N = 1$ superconformal net と呼ぶことにする．$N = 1$ super Virasoro 代数の表現においても同様に，c の取りうる値に制限がつき，

$$\{\frac{3}{2}\left(1 - \frac{8}{m(m+2)}\right) \mid m = 3, 4, 5, \ldots\} \cup [\frac{3}{2}, \infty)$$

となることがわかっている．この離散部分はやはり，[10] の coset 構成で得られる．(Stress-energy tensor の Fermi 版と思ってもやはり作用素値超関数からこの net ができる．) これも作用素環の枠組みで実現できることが Xu によってわかっているので，それによって得られる $N = 1$ superconformal net を $N = 1$ super Virasoro net と呼ぶ．これの延長を分類することが，$N = 1$ superconformal net の分類である．$N = 1$ super Virasoro net の even part を考えればこれは普通の local conformal net なので，α-induction と modular invariant によるこれまでの分類法が使える．この設定での，modular invariant の list は [2] で得られており，それが完全なリストであることは [8, 9] の手法で示せる．これによって，完全な分類リストが得られるのである．それは，

- $N = 1$ super Virasoro net
- その index 2 の拡張
- 6 つの例外

からなる．[4] に詳しいことが書かれている．例外は coset construction, [18] の意味での mirror extension, さらにその index 2 の拡張である．

5 Fredholm index と Jones index

さてこの設定で，Fredholm index と Jones index の間に新しい関係が見出されることを最後に説明しよう．まず，Ramond 代数の関係式の中に $L_0 = G_0^2 + \frac{c}{24}$ があることに注意する．Fermi conformal net A の表現で，この関係式も表現されているものを考える．G_0 の表現

された像を Q と書くとこれは odd かつ自己共役な作用素である．これは，*supercharge operator* と呼ばれるもので，このような Q を持つ表現を supersymmetric と呼ぶことにする．Q を偶，奇の部分に分解して，上の off diagonal part を Q_+ と書き，その Fredholm index ind $(Q_+) = \dim\ker Q_+ - \dim\ker Q_+^*$ を考えることにする．(Q_+ は一般に非有界なので，これは通常の意味での Fredholm 作用素ではないことに注意する．) この数を Witten index とも呼ぶ．

これについて net A が [12] の意味で modular であるとき，次の等式が成り立つ．

$$\mathrm{ind}\ (Q_+) = \frac{d(\rho)}{\sqrt{\mu_A}} \sum_{\nu\in R} K(\rho,\nu) d(\nu) \mathrm{null}(\nu, c/24).$$

ただしここで，ρ は今考えている表現を even part に制限した表現を既約分解したときに現れる二つの表現のうちの一つで，$d(\rho)$ はその次元，すなわち像の Jones index の平方根である．R は A の even part の既約表現で A の Ramond 表現と呼ばれるクラスに誘導されるものの集合である．また，K は monodromy 作用素に left inverse を適用したもので，$\mathrm{null}(\nu,h)$ は $\ker(L_{0,\nu}-h)$ の次元である．さらに，μ_A は net A の μ-index である．これについても詳しくは [4] を参照していただきたい．

Super Virasoro net で central charge の値が discrete part すなわち 3/2 未満の値をとる場合は，このような supersymmetric な一般表現を $c = 3(1-8/m(m+2))/2$ (m は偶数) の場合に持つことがわかる．

References

[1] J. Böckenhauer, D. E. Evans & Y. Kawahigashi, *On α-induction, chiral generators and modular invariants for subfactors*, Commun. Math. Phys. **208** (1999) 429–487. math.OA/9904109.

[2] A. Cappelli, *Modular invariant partition functions of superconformal theories*, Phys. Lett. **B 185** (1987) 82–88.

[3] A. Cappelli, C. Itzykson & J.-B. Zuber, *The A-D-E classification of minimal and* $A_1^{(1)}$ *conformal invariant theories*, Commun. Math. Phys. **113** (1987) 1–26.

[4] S. Carpi, Y. Kawahigashi,& R. Longo, *Structure and classification of superconformal nets*, preprint 2007, arXiv:0705.3609.

[5] S. Doplicher, R. Haag & J. E. Roberts, *Local observables and particle statistics*, I. Commun. Math. Phys. **23** (1971) 199–230; II. **35** (1974) 49–85.

[6] D. Friedan, Z. Qiu & S. Shenker, *Superconformal invariance in two dimensions and the tricritical Ising model*, Phys. Lett. **151B**, 37 (1985).

[7] K. Fredenhagen, K.-H. Rehren & B. Schroer, *Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebras*, I. Commun. Math. Phys. **125** (1989) 201–226, II. Rev. Math. Phys. **Special issue** (1992) 113–157.

[8] T. Gannon, *Towards a classification of* $\mathrm{su}(2)\oplus\cdots\oplus\mathrm{su}(2)$ *modular invariant partition functions*, J. Math. Phys. **36** (1995) 675–706.

[9] T. Gannon & M. A. Walton, *On the classification of diagonal coset modular invariants*, Commun. Math. Phys. **173** (1995) 175–197.

[10] P. Goddard, A. Kent & D. Olive, *Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebras*, Commun. Math. Phys. **103**, 105-119 (1986).

[11] Y. Kawahigashi & R. Longo, *Classification of local conformal nets. Case* $c < 1$, Ann. of Math. **160** (2004), 493–522. math-ph/0201015.

[12] Y. Kawahigashi & R. Longo, *Noncommutative spectral invariants and black hole entropy*, Commun. Math. Phys. **257** (2005), 193–225.

[13] Y. Kawahigashi, R. Longo & M. Müger, *Multi-interval subfactors and modularity of representations in conformal field theory*, Commun. Math. Phys. **219** (2001) 631–669. math.OA/9903104.

[14] R. Longo & K.-H. Rehren, *Nets of subfactors*, Rev. Math. Phys. **7** (1995) 567–597.

[15] F. Xu, *New braided endomorphisms from conformal inclusions*, Commun. Math. Phys. **192** (1998) 347–403.

[16] F. Xu, *Algebraic coset conformal field theories I*, Commun. Math. Phys. **211** (2000) 1–44.

[17] F. Xu, *Algebraic coset conformal field theories II*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **35** (1999) 795–824.

[18] F. Xu, *Mirror extensions of local nets*, Commun. Math. Phys. **270** (2007) 835-847.